Nr. 6 c)

ACHTUNG: DRUCKFEHLER! „MAL" !!

Es muss heißen: $f_t(x) = t\,x^2 \cdot e^{-tx}$ und $t>0$

Kurzprotokoll der Lösung:

- Keine Symmetrie!
- Achsenschnittpunkte: (0/0)
- Verhalten für $x \to \pm\infty$ $(t>0)$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{tx^2}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{e^{-tx}}_{\to 0} = 0 \quad (\text{wegen } t>0)$$

also für $x \to +\infty$ waagerechte Asymptote: $y=0$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{tx^2}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{e^{-tx}}_{\to+\infty} = \infty \quad (\text{wegen } t>0)$$

- Ableitungen $f_t(x) = tx^2 \cdot e^{-tx}$

$$f_t'(x) = 2tx \cdot e^{-tx} + tx^2 \cdot e^{-tx} \cdot (-t)$$
$$= 2tx \cdot e^{-tx} - t^2x^2 \cdot e^{-tx}$$
$$= e^{-tx} \cdot (2tx - t^2x^2)$$

$$f_t''(x) = e^{-tx} \cdot (-t) \cdot (2tx - t^2x^2) + e^{-tx} \cdot (2t - 2t^2x)$$
$$= e^{-tx}(-2t^2x + t^3x^2) + e^{-tx} \cdot (2t - 2t^2x)$$
$$= e^{-tx}(-2t^2x + t^3x^2 + 2t - 2t^2x)$$
$$= e^{-tx} \cdot (t^3x^2 - 4t^2x + 2t)$$

$$f_t'''(x) = e^{-tx} \cdot (-t) \cdot (t^3x^2 - 4t^2x + 2t) + e^{-tx} \cdot (2t^3x - 4t^2)$$
$$= e^{-tx}(-t^4x^2 + 4t^3x - 2t^2) + e^{-tx} \cdot (2t^3x - 4t^2)$$
$$= e^{-tx} \cdot (-t^4x^2 + 6t^3x - 6t^2)$$

- Extrema: Kandidaten $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{t}$

wegen $f_t''(0) > 0 \Rightarrow TP(0/0)$

wegen $f_t''(\frac{2}{t}) < 0 \Rightarrow HP$ mit y-Koord $\frac{4}{te^2}$

also $HP(\frac{2}{t} / \frac{4}{te^2})$

- Wendepunkte:

Kandidaten $x_1 = \frac{1}{t}(2-\sqrt{2})$; $x_2 = \frac{1}{t}(2+\sqrt{2})$

wegen $f_t'''(x_1) \approx 1{,}57\,t^2 \neq 0 \Rightarrow WP$

$f_t(x_2) \approx 0{,}093\,t^2 \neq 0 \Rightarrow WP$

y-Koord.

$$WP\Big(\underbrace{\tfrac{1}{t}(2-\sqrt{2})}_{\approx \frac{0{,}586}{t}} \Big/ \underbrace{\tfrac{1}{t}e^{\sqrt{2}-2}\cdot(6-4\sqrt{2})}_{\approx \frac{0{,}191}{t}}\Big)$$

und

$$WP\Big(\underbrace{\tfrac{1}{t}(2+\sqrt{2})}_{\approx \frac{3{,}414}{t}} \Big/ \underbrace{\tfrac{1}{t}e^{-\sqrt{2}-2}(6+4\sqrt{2})}_{\approx \frac{0{,}384}{t}}\Big)$$

Graph (Skizze!)