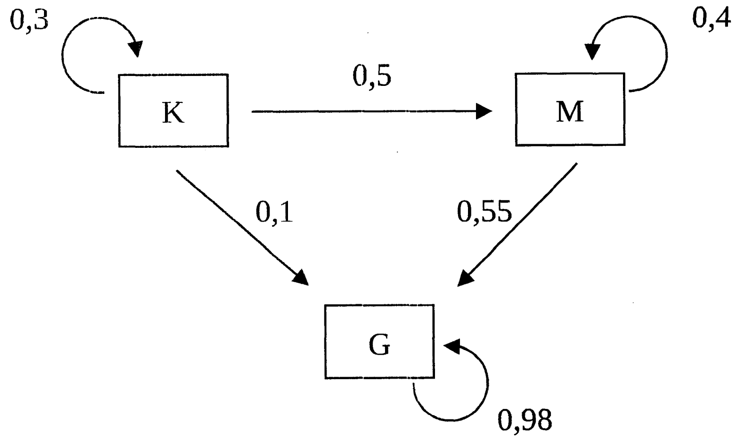
Modelllösung a)



$$\begin{array}{cc} & \textit{von:} \quad \begin{array}{ccc} \text{K} & \text{M} & \text{G} \end{array} \\ \textit{nach:} & \\ \begin{array}{c} \text{K} \\ \text{M} \\ \text{G} \end{array} & \boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}55 & 0{,}98 \end{pmatrix} \end{array}$$

Modelllösung b)

(1) $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112{,}5 \\ 2641{,}5 \\ 6746 \end{pmatrix}$

Nach einer Wachstumsperiode können etwa 113 Tannen der Größenklasse K, 2642 Tannen der Größenklasse M und 6746 Tannen der Größenklasse G erwartet werden. [Auch andere sinnvolle Rundungen werden akzeptiert.]

(2) Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ der Bestandsvektor eine Wachstumsperiode vor der Bestandsaufnahme.

Zu lösen ist die Gleichung $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}$.

Es ergibt sich: $x_1 = 1800$, $x_2 = 5400$, $x_3 \approx 3326$.

Eine Wachstumsperiode vor der Bestandsaufnahme gehörten 1800 Tannen zur Größenklasse K, 5400 Tannen zur Größenklasse M und rund 3326 Tannen zur Größenklasse G.

b) (3) Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ der aktuelle Bestand(svektor).

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}25\,x_1 \\ 0{,}7\,x_1 + 0{,}55\,x_2 \\ 0{,}4\,x_2 + 0{,}95\,x_3 \end{pmatrix} \Leftarrow \text{neuer Bestand in Kategorien}$$

INSGESAMT:

$$0{,}25\,x_1 + 0{,}7\,x_1 + 0{,}55\,x_2 + 0{,}4\,x_2 + 0{,}95\,x_3$$
$$= 0{,}95\,x_1 + 0{,}95\,x_2 + 0{,}95\,x_3$$
$$= 0{,}95 \cdot (\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{\text{Bestand VORHER}}) \text{ Bäume}$$

ALSO: NACHHER gibt es nur noch 95% der Anzahl von Bäumen von VORHER.

[mögliche Alternative: Spaltensumme der Matrix A betrachten!]

(4)
$$b_0 \cdot 0{,}95^1 = b_1$$
$$b_1 \cdot 0{,}95^1 = b_2$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{b_0 \cdot 0{,}95}^{b_1} \cdot 0{,}95 = b_2$$
$$\Leftrightarrow b_0 \cdot 0{,}95^2 = b_2$$
$$b_0 \cdot 0{,}95^3 = b_3$$
$$\vdots$$
$$b_0 \cdot 0{,}95^n = b_n$$
$$\Leftrightarrow 0{,}95^n = \frac{b_n}{b_0} \Leftarrow \text{Anteil aktueller Bestand an Startbestand!}$$

$$0{,}95^n = 0{,}6 \quad (= 60\%)$$
$$\Leftrightarrow n = \log_{0{,}95} 0{,}6 = 9{,}96$$

$$\left.\begin{aligned} 0{,}95^9 &= 0{,}63024\ldots \\ 0{,}95^{10} &= 0{,}5987\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ nach 10 Wachstumsperioden weniger als 60% vom ursprünglichen Bestand

c) (1) $A \cdot \vec{x} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25x_1 \\ 0{,}7x_1 + 0{,}55x_2 \\ 0{,}4x_2 + 0{,}95x_3 \end{pmatrix}$ [S.0]

(*) von K werden 20% abgeholzt ⇒ bleiben 80%!
M 30% ⇒ 70%!
G 45% ⇒ 55%

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 0{,}25x_1 \cdot 0{,}8 = 0{,}2x_1 \\ (0{,}7x_1 + 0{,}55x_2) \cdot 0{,}7 = 0{,}49x_1 + 0{,}385x_2 \\ (0{,}4x_2 + 0{,}95x_3) \cdot 0{,}55 = 0{,}22x_2 + 0{,}5225x_3 \end{array}$$

Behauptung / Kontrollergebnis

[mögliche Alternative:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} 0{,}2x_1 \\ 0{,}49x_1 + 0{,}385x_2 \\ 0{,}22x_2 + 0{,}5225x_3 \end{pmatrix} \checkmark \;]$$

(2) NACH dem Abholzen beschreibt [ ] den Bestand ; im K kommen so viele Bäume hinzu wie zuvor insgesamt abgeholzt wurden. Mit (*) folgt:

Insgesamt werden

$$0{,}2 \cdot (0{,}25x_1) + 0{,}3 \cdot (0{,}49x_1 + 0{,}385x_2) + 0{,}45 \cdot (0{,}22x_2 + 0{,}5225x_3)$$

$$= 0{,}05x_1 + 0{,}21x + 0{,}165x_2 + 0{,}1x_2 + 0{,}4275x_3$$

$= 0{,}26x_1 + 0{,}345x_2 + 0{,}4275x_3$ Tannen abgeholzt, die im K wieder neu angepflanzt werden (= dort hinzukommen)

ALSO: M und G bleiben unverändert, aber

$$K_{neu} = 0{,}2x_1 + 0{,}26x_1 + 0{,}345x_2 + 0{,}4275x_3$$
$$= 0{,}46x_1 + 0{,}345x_2 + 0{,}4275x_3$$

Also ist der "Gesamtbestandsvektor"

(Abholzen UND Aufforsten)

$$\begin{pmatrix} 0,46x_1 + 0,345x_2 + 0,4275x_3 \\ 0,49x_1 + 0,385x_2 \\ 0,22x_2 + 0,5225x_3 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und daher gilt: $C = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,345 & 0,4275 \\ 0,49 & 0,385 & 0 \\ 0 & 0,22 & 0,5225 \end{pmatrix}$

(3) Durch die Wiederaufforstung ändert sich die Gesamtzahl im Vergleich zur ursprünglichen Situation nicht, folglich bleibt der Bestand (bei anderer Verteilung der Kategorien) insgesamt bei 95% der Ausgangsverteilung.

(4) Sei $x = x_1 + x_2 + x_3$ der Gesamtbestand. In K wird ein bestimmter Anteil des gesamten Anfangsbestands zusätzlich neu angepflanzt, d.h.

$$\underbrace{\begin{aligned} x' &= (x_1 + x_2 + x_3)\cdot 0,95 \\ &\quad + a\cdot(x_1 + x_2 + x_3) \\ &= (0,95 + a)\cdot(x_1 + x_2 + x_3) \\ &= (0,95 + a)\cdot x \\ x'' &= (0,95 + a)^2 \cdot x \end{aligned}}_{\text{\underline{Zwei} Wachstumsperioden!}}$$

neue Gesamtzahl plus zusätzliche Aufforstung!

Bestand soll auf diese Weise um 10% wachsen, d.h. von $x \to 1,1\cdot x$!

Ansatz $(0,95 + a)^2 \cdot x = 1,1x$

$$\Leftrightarrow (0,95 + a)^2 = 1,1$$

$$\Leftrightarrow 0,95 + a = \pm\sqrt{1,1} \Leftrightarrow a_1 = +\sqrt{1,1} - 0,95 =$$

$$a_2 = -\sqrt{1,1} - 0,95 =$$

HIER: $a = 0,0988\ldots$