$f(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$

$f'(t) = 2 \cdot 0{,}02t \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1t} \cdot (-0{,}1)$

$= 0{,}04t \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} - 0{,}002t^2 \cdot e^{-0{,}1t}$

$= (0{,}04t - 0{,}002t^2)\, e^{-0{,}1t}$

$f''(t) = 0{,}0002 \cdot (t^2 - 40t + 200) \cdot e^{-0{,}1t}$

Extrema

Notw. Krit: $f'(t) = 0$

$\Leftrightarrow (0{,}04t - 0{,}002t^2) \cdot e^{-0{,}1t} = 0$

$\Leftrightarrow -0{,}002t^2 + 0{,}04t = 0$ oder $\underbrace{e^{-0{,}1t}}_{>0} = 0$

$\Leftrightarrow -2t^2 + 40t = 0$

$\Leftrightarrow t \cdot (-2t + 40) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0$ oder $-2t + 40 = 0$

$\Leftrightarrow 40 = 2t \Leftrightarrow t = 20$

Hinr. Krit $f_t''(x) \gtrless 0$

$f_t''(0) = 0{,}0002 \cdot (0^2 - 40 \cdot 0 + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot 0}$

$= 0{,}0002 \cdot (200) \cdot e^0$

$= 0{,}04 > 0 \Rightarrow TP$

$f_t''(20) = 0{,}0002 \cdot (20^2 - 40 \cdot 20 + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20}$

$= 0{,}0002 \cdot (400 - 800 + 200) \cdot e^{-2}$

$= \underbrace{0{,}0002}_{>0} \cdot \underbrace{(-200)}_{<0} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^2}}_{>0} < 0 \Rightarrow HP$

y-Koord. $f_t(20) = 0{,}02 \cdot (20^2) \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20}$

$= 0{,}02 \cdot 400 \cdot \frac{1}{e^2} = 1{,}082\ldots$

Randwerte:

$f_t(0) = 0{,}02 \cdot 0^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 0} = 0$

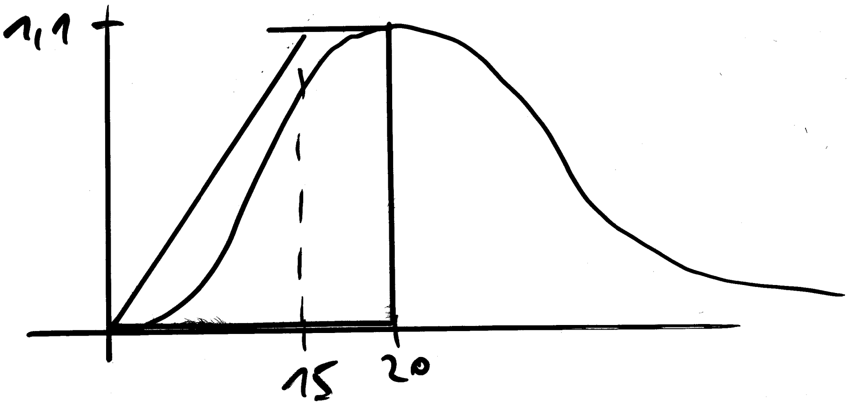
$f_t(100) = 0{,}02 \cdot 100^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 100} = 0{,}008\ldots$

$1{,}08\frac{m}{T}$

Also für $t = 20$ liegt das stärkste Wachstum vor!

c) Begründung am Graphen

≙ HIER : (grobe) Abschätzung der Fläche unterhalb des Graphen im Bereich $[0;20]$



$A_{Trapez} = (20+5)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1{,}1 = 12{,}5\cdot 1{,}1 = 13{,}75 < 20!$

$F(t) \stackrel{?}{=} -0{,}2\cdot(t^2+20t+200)\cdot e^{-0{,}1\cdot t}$

$F'(t) = -0{,}2\cdot\left[(2t+20)\cdot e^{-0{,}1\cdot t} + (t^2+20t+200)\cdot e^{-0{,}1t}\cdot(-0{,}1)\right]$

$= -0{,}2\cdot\left[e^{-0{,}1t}\cdot(2t+20+(-0{,}1t^2-2t-20\right.$

$= -0{,}2\cdot\left[e^{-0{,}1t}\cdot(-0{,}1t^2)\right]$

$= -0{,}2\cdot e^{-0{,}1t}\cdot(-0{,}1)t^2$

$= 0{,}02\cdot t^2\cdot e^{-0{,}1t} = f(t)$

$\int_0^{20} f(t)\,dt = \left[-0{,}2\cdot(t^2+20t+200)\cdot e^{-0{,}1\cdot t}\right]_0^{20}$

$= \ldots$

$= \underline{12{,}93}$

Die zu erwartende Höhe beträgt $\underline{13{,}13\ m}$!